Relojes de Sol: sistematización del trazado[*]

Roberto Palmer Navarro[**]

Enero de 2026

Resumen

La sistematización del trazado de un reloj solar en una superficie plana se consigue conociendo las coordenadas cartesianas de las líneas horarias y de fecha. El procedimiento consiste en representar los rayos solares mediante rectas que pasan por el extremo de un nomon y alcanzan el plano de proyección[1].

Índice

1. Meridiano local 2

2. Superficie de proyección plana 3
   - 2.1. Ecuatorial . . . 4
   - 2.2. Polar . . . 5
   - 2.3. Horizontal . . . 6
   - 2.4. Vertical perpendicular al meridiano local . . . 7
   - 2.5. Vertical declinado . . . 8
   - 2.6. Vertical paralelo al meridiano local . . . 10

3. Nomon 11
   - 3.1. Nomon paralelo al eje terrestre . . . 11
   - 3.2. Nomon móvil . . . 12
   - 3.3. Nomon múltiple . . . 14

A. Referencias 18

B. Guiones para Gnuplot 18

[*]Relojes de Sol: sistematización del trazado © 2026 by Roberto Palmer Navarro is licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International. To view a copy of this license, visit https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

[**]Ldo. en Fisicas por la Universidad de Valencia. ropalna@proton.me

[1]El archivo está disponible para su descarga en https://archive.org/details/rs-proyecto

El reloj de Sol ecuatorial, compuesto por un nomon paralelo al eje terrestre y una superficie de proyección de sombras paralela al plano ecuatorial, sirve de base para elaborar otros diseños creativos, adecuados a la ubicación y a los requisitos de su construcción.

Los rayos solares que inciden en la superficie terrestre lo hacen en una dirección paralela a la línea que une sus centros, y su inclinación cambia a lo largo del día y del año. La elevada distancia que separa el Sol de la Tierra justifica la dirección de los rayos solares, mientras que el recorrido diurno del Sol en su órbita aparente y el cambio de altura del Sol sobre el Ecuador determinan la variación de la inclinación diurna y anual respectivamente. Dicha inclinación también varía con la la latitud debido a la esfericidad de la Tierra.

1. Meridiano local

La prolongación de los círculos máximos de la Tierra, los meridianos y el ecuador, hasta la bóveda celeste es la base del sistema de coordenadas ecuatorial usado en Astronomía, formado por el plano ecuatorial y el eje celestes, este último prolongación del eje terrestre que actualmente apunta a la estrella Polar. Se trata de un sistema de coordenadas angulares pero en este trabajo se tratarán como cartesianas.
Para diseñar y calcular el trazado de un reloj solar es imprescindible localizar la dirección del meridiano celeste local, los puntos de corte con la línea de horizonte indican las direcciones Norte y Sur geográficos y la recta que los une la meridiana.
El meridiano local se determina cuando el Sol lo transita, en ese instante la altura del Sol sobre el horizonte es la máxima. Dicho instante varía a lo largo del año y no coincide con el mediodía oficial (las 13 horas o las 14 en horario de verano) salvo en las fechas 15 de abril, 13 de junio, 1 de septiembre y 25 de diciembre. El horario oficial se basa en la hora solar media, tiempo que invierte el Sol en recorrer 15° de su órbita aparente alrededor de la Tierra.
La diferencia entre la hora solar verdadera V y la hora solar media H recibe el nombre de ecuación de tiempo $ET = V - H$. Los efectos que influyen en la variación del movimiento del Sol verdadero son dos, la declinación del Sol (δ) y la diferente velocidad orbital de la Tierra, la primera debida a la oblicuidad de la órbita terrestre y la segunda a su excentricidad.
La declinación es la altura angular del Sol sobre el ecuador celeste, su valor expresado en grados para cualquier día del año N, contado a partir del 1 de enero, viene dado de forma aproximada por la siguiente expresión (Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid 2025)

$$\delta = \operatorname{arc\,sen}\left(0'398 \cdot \operatorname{sen}(279 + 0'9857 \cdot N + 1'9 \cdot \operatorname{sen}(0'9856 \cdot N - 4))\right) \tag{1}$$

Ambos efectos combinados dan lugar a la ecuación de tiempo, que alcanza un valor máximo de $+16^{min}25^{s}$ el 3 de noviembre y un mínimo de $-14^{min}15^{s}$ el 11 de febrero.
El valor de la ecuación de tiempo para un día dado se puede conocer consultando un servidor de efemérides[2] o mediante la aplicación de la siguiente expresión (Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid 2025) expresada en segundos, para cualquier día del año:

$$ET = 596 \cdot \operatorname{sen}(200 + 1'9713 \cdot N) + 441 \cdot \operatorname{sen}(175 + 0'9856 \cdot N) + 240\ \Delta\lambda \tag{2}$$

[2] Portal de formularios de L'Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides (IMCCE) **https://ssp.imcce.fr/forms/visibility**

a la que se le ha añadido el término $\Delta\lambda$ expresado en grados sexagesimales (el 240 es el factor de conversión de grados sexagesimales a segundos horarios), diferencia entre la longitud que define el huso horario δ_0 y la longitud del lugar de ubicación λ del reloj $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, positiva cuando se sitúa al Este y negativa al Oeste.

En cualquier día la sombra de un nomon perpendicular al plano horizontal marca la dirección Norte-Sur o meridiana cuando el Sol transita el meridiano local, y mediante la ecuación de tiempo se sabe con cuánto adelanto o atraso lo hace respecto al mediodía oficial. A modo de ejemplo el 15 de enero el Sol pasa por el meridiano local de cualquier lugar con 8'72 minutos de retraso, hay dos personas que ese mismo día quieren determinar su meridiano local, una en Girona (de longitud geográfica +2'8°) que calcula que el Sol pasará con un adelanto de unos 2'5 minutos, y la otra en La Coruña (de longitud -8'4°) calcula un retraso de 42'3 minutos.

2. Superficie de proyección plana

Los cálculos procedentes sirven para hacer el trazado de un reloj solar sobre superficies planas, con el nomon perpendicular a las mismas y usando la hora solar media que, una vez obtenidos los cálculos, puede sustituirse por la verdadera. Un trazado que se complementa con la selección de una de las tres variantes de nomon propuestas (sección 3).

En el trazado de los relojes polar y ecuatorial se usará el sistema de coordenadas ecuatoriales adaptado a cartesianas, formado por los ejes X Z del plano ecuatorial y el eje Y perpendicular al mismo y paralelo al eje terrestre, con valores positivos hacia el Este y hacia arriba los dos primeros y al Polo Norte el tercero. El vector unitario de la dirección de los rayos solares, en este sistema, depende del ángulo horario del Sol medio H, relacionado con la hora solar media 0° para las 6 horas y 180° para las 18 horas, y de la declinación solar δ:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \operatorname{sen}\delta \\ \cos\delta\operatorname{sen} H \end{pmatrix} \tag{3}$$

En el trazado de los relojes horizontal y vertical el sistema de referencia está formado por los ejes X' Y' del plano horizontal y el eje vertical Z', que resulta del giro de los ejes Y y Z alrededor del eje X del sistema anterior. El vector unitario de la dirección de los rayos solares debe transformarse a este nuevo sistema:

$$\vec{u'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \operatorname{sen}\delta \\ \cos\delta\operatorname{sen} H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \cos\varphi\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\varphi\cos\delta\operatorname{sen} H \\ \operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi\cos\delta\operatorname{sen} H \end{pmatrix} \tag{4}$$

La resolución es común en todas las superficies: elección de sistema de referencia, coordenadas de los puntos de inserción del nomon y de su extremo, ecuación de las rectas paramétricas que representan los rayos que pasan por el extremo del nomon, condición que determina el alcance de los rayos en la superficie de proyección, determinación del parámetro y de las coordenadas del trazado.

Figura 1: Ejemplos de relojes con planos de proyección ecuatorial, polar, horizontal y vertical, ubicados en Londres, Cantabria, Albuixec y Valencia (de izquierda a derecha).

2.1. Ecuatorial

El reloj solar ecuatorial tiene un nomon paralelo al eje terrestre y perpendicular al plano ecuatorial, que actúa como superficie de proyección de sombras.

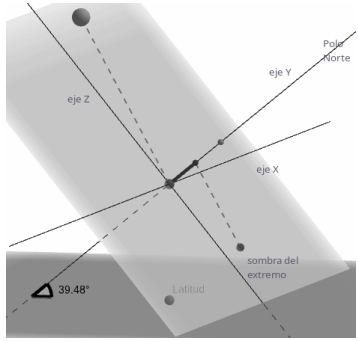

Figura 2: En cualquier punto de la superficie terrestre el plano ecuatorial forma un ángulo con el horizontal igual a la colatitud. La figura muestra la dirección paralela de los rayos solares que pasan por el extremo del nomon y proyectan su sombra en el plano ecuatorial.

Las coordenadas del punto de inserción del nomon son $(0,0,0)$ y las de su extremo $(0,d,0)$, donde d es su longitud. Las rectas que representan los rayos que pasan por el extremo del nomon vienen dadas por la ecuación paramétrica $(x,y,z) = (0,d,0) + \alpha\,\vec{u}$, siendo sus componentes cartesianas:

$$x = 0 + \alpha\ \cos\delta\cos H \qquad y = d + \alpha\ \operatorname{sen}\delta \qquad z = \alpha\ \cos\delta\operatorname{sen} H \tag{5}$$

La coordenada Y de los rayos que alcanzan la superficie del plano XZ es $y = 0$, esta condición permite conocer el parámetro α:

$$\alpha = \frac{-d}{\operatorname{sen}\delta} \tag{6}$$

y con él las coordenadas en el plano de proyección XZ para el trazado de las líneas horarias y de fecha

$$x = -d\cot\delta\cos H \qquad y = -d\cot\delta\operatorname{sen} H \tag{7}$$

la declinación y la hora solar media son argumentos de las curvas, si se fija el valor de la declinación solar resulta la curva que une las horas en una determinada fecha, por ejemplo la de los solsticios y equinoccios, y si se fija una determinada hora se obtiene su línea horaria a lo largo del año. El extremo del nomon marca la hora y la fecha, y la sombra de toda su longitud también coincide con la línea horaria correspondiente.

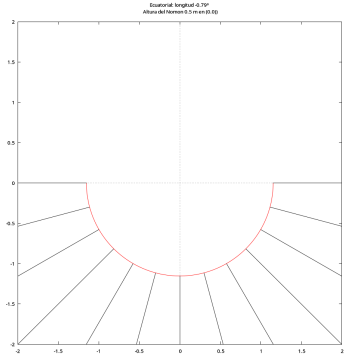

Figura 3: Las líneas horarias y la curva del solsticio son simétricas en ambas caras del plano ecuatorial, la línea de equinoccios es paralela al eje X en la dirección Este-Oeste.

2.2. Polar

En este caso el nomon y la superficie de proyección están intercambiados con respecto al reloj ecuatorial, el nomon se coloca paralelo al plano ecuatorial y perpendicular al plano polar.

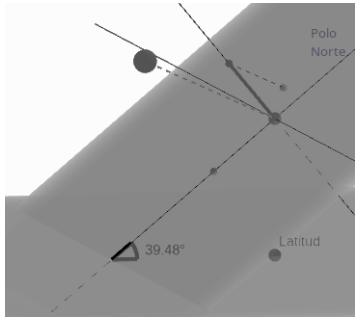

Figura 4: En cualquier punto de la superficie terrestre el plano polar forma un ángulo con el horizontal igual a la latitud. el sistema de coordenadas es el mismo que el usado para el reloj ecuatorial.

Las coordenadas del punto de inserción del nomon son $(0, 0, 0)$ y las de su extremo $(0, 0, h)$, donde h es la longitud o altura del nomon. Las rectas que representan los rayos que pasan por el extremo del nomon son las ecuaciones paramétricas $(x, y, z) = (0, 0, h) + \alpha\ \vec{u}$, de componentes cartesianas:

$$x = 0 + \alpha\ \cos\delta \cos H \qquad y = 0 + \alpha\ \operatorname{sen}\delta \qquad z = h + \alpha\ \cos\delta \operatorname{sen} H \tag{8}$$

La coordenada Z de los rayos que alcanzan el plano de proyección XY es $z = 0$, con esta condición se conoce el parámetro α:

$$\alpha = \frac{-h}{\cos\delta \operatorname{sen} H} \tag{9}$$

y con él las coordenadas en el plano XY para el trazado de las líneas horarias y de fecha

$$x = -\frac{h \cos H}{\operatorname{sen} H} \qquad y = -\frac{h \tan\delta}{\operatorname{sen} H} \tag{10}$$

Si se sustituye la hora solar media por la verdadera las líneas horarias se convierten en una curva cerrada llamada analema, como puede apreciarse en muchas de las figuras de los diferentes trazados.

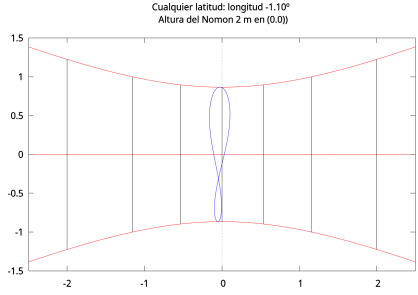

Figura 5: La parte inferior del trazado apunta al Sur, la curva del solsticio de invierno es la mas cercana al Norte y la de verano al Sur, mientras que la recta orientada de Este a Oeste es la de los equinoccios, todo esto en el hemisferio Norte ya que en el hemisferio Sur las curvas de los solsticios están invertidas. Las líneas horarias son rectas paralelas al eje Y y la longitud del lugar de ubicación influye en la posición del analema.

2.3. Horizontal

Debido a que el plano horizontal forma un ángulo con el polar igual a la latitud φ del lugar de ubicación, se usará el sistema de referencia $X'Y'Z'$ indicado anteriormente.

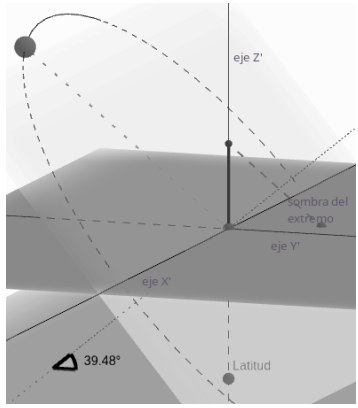

Figura 6: El eje Y' coincide con la meridiana del lugar, el eje X' con la dirección Este-Oeste y el eje Z' con la vertical.

El nomon se coloca verticalmente y perpendicular al plano horizontal, las coordenadas del punto de inserción son $(0,0,0)$ y las de su extremo el $(0,0,h)$. Las componentes de las rectas $(x',y',z') = (0,0,h) + \alpha\,\vec{u}'$ que representan los rayos que pasan por el extremo del nomon son:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha \cos\delta \cos H \\ y' &= \alpha\,(\cos\varphi \operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\varphi \cos\delta \operatorname{sen} H) \\ z' &= h + \alpha\,(\operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \operatorname{sen} H) \end{aligned} \tag{11}$$

de nuevo la condición que permite conocer el parámetro α es $z' = 0$, cuando los rayos alcanzan el plano de proyección horizontal $X'Y'$:

$$\alpha = \frac{-h}{\operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \operatorname{sen} H} \tag{12}$$

se reescriben y simplifican las ecuaciones para hacer el trazado de las lineas horarias y de fecha, siendo la declinación y la hora solar media los argumentos de las coordenadas:

$$x' = -\frac{h\ \cos H}{\operatorname{sen}\varphi\ \tan\delta + \cos\varphi\ \operatorname{sen} H} \qquad y' = -\frac{h\,(\cos\varphi\ \tan\delta - \operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen} H)}{\operatorname{sen}\varphi\ \tan\delta + \cos\varphi\ \operatorname{sen} H} \tag{13}$$

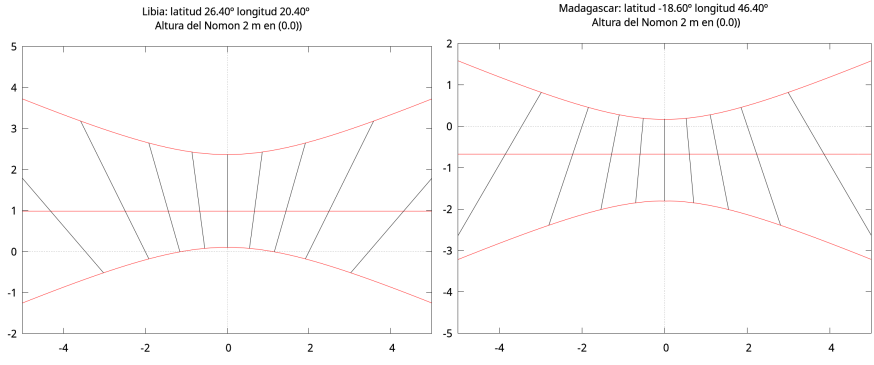

Figura 7: Diseño para ubicaciones en ambos hemisferios con un nomon de 2 m de longitud, en el del Norte la sombra proyectada por el extremo del nomon en el solsticio de invierno alcanza la curva mas al Norte y en el de verano las mas cercana al Sur, al contrario de lo que ocurre en el hemisferio Sur.

2.4. Vertical perpendicular al meridiano local

El plano vertical se coloca perpendicular al plano horizontal que lo corta en la recta $y' = d > 0$, siendo d la coordenada Y'. El nomon se inserta en el plano vertical a una altura h del horizontal y de longitud d en el punto de coordenadas $(0, d, h)$, siendo las de su extremo $(0, 0, h)$.

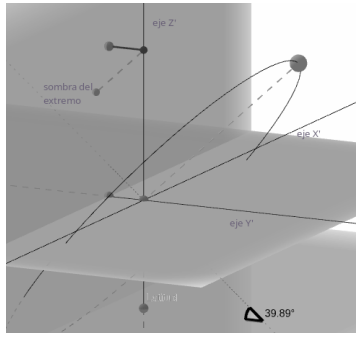

Figura 8: El plano vertical se ha desplazado hacia el Norte paralelamente al eje X', de esta forma el extremo del nomon se posiciona sobre el eje Z' a cierta altura sobre el plano horizontal.

El parámetro α de las ecuaciones (11) se obtiene al considerar que los rayos que alcanzan el plano vertical $X'Z'$ cumplen la condición $y' = d$:

$$\alpha = \frac{d}{\cos\varphi \operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\varphi \cos\delta \operatorname{sen} H} \tag{14}$$

con el que se obtienen, una vez simplificadas, las coordenadas que permiten hacer el trazado del reloj:

$$x' = \frac{d\ \cos H}{\cos\varphi\tan\delta - \ \operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen} H} \qquad z' = h + \frac{d\,(\operatorname{sen}\varphi\ \tan\delta + \cos\varphi\ \operatorname{sen} H)}{\cos\varphi\tan\delta - \ \operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen} H} \tag{15}$$

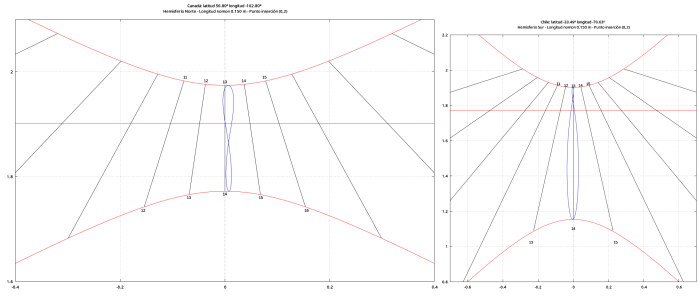

Figura 9: En el hemisferio Norte la pared apunta al Sur y la longitud del nomon se considera positiva, y negativa en el hemisferio Sur donde la pared está orientada al Norte. Se ha indicado el horario de verano y el de invierno junto a su linea de solsticio, el analema de las 12 indica que están invertidas las estaciones.

2.5. Vertical declinado

Un plano vertical se dice declinado o declinante cuando su orientación se desvía de la dirección Oeste-Este un cierto ángulo ϕ, se caracteriza porque puede albergar un reloj tanto en su cara orientada al Norte como en la del Sur. Se elige el eje X' positivo como origen del ángulo de declinación 0°, de forma que un giro al Este significa una declinación positiva y negativa al Oeste, signos que se mantienen para ambas caras del plano vertical.

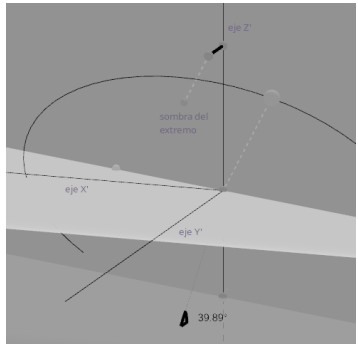

Figura 10: El eje de giro del plano vertical pasa por el origen del sistema, la figura muestra que está orientado al Sur y declinado al Oeste y con el punto de inserción del nomon sobre el eje Z'.

El plano vertical declinante corta al eje Y' en el origen $y' = 0$ siendo su eje de giro paralelo al vertical. Las condiciones de inserción y longitud del nomon son las mismas que en las del plano vertical no declinante, sin embargo las coordenadas del punto de inserción son $(0, 0, h)$ y las del extremo $(0, d, h)$ siendo $d > 0$ si se inserta en la cara Norte y $d < 0$ en la Sur.

Las componentes de las rectas $(x', y', z') = (0, d, h) + \alpha\ \vec{u}'$ que representan los rayos que pasan por el extremo del nomon son:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha\ \cos\delta\cos H \\ y' &= d + \alpha\,(\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\delta - \mathrm{sen}\,\varphi\cos\delta\,\mathrm{sen}\,H) \\ z' &= h + \alpha\,(\mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,\delta + \cos\varphi\cos\delta\,\mathrm{sen}\,H) \end{aligned} \tag{16}$$

El parámetro α se obtiene al considerar que los rayos que alcanzan el plano vertical deben cumplir la condición $y' = \tan\phi\ x'$:

$$\alpha = \frac{-d}{(\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\delta - \mathrm{sen}\,\varphi\cos\delta\,\mathrm{sen}\,H\ - \tan\phi\cos\delta\cos H)} \tag{17}$$

y con él las ecuaciones de las coordenadas, simplificadas, para el trazado del reloj en el plano vertical formado por los ejes $(X'\cos\phi + Y'\,\mathrm{sen}\,\phi, Z')$:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{-d\ \cos H}{\cos\varphi\ \tan\delta - \mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,H - \tan\phi\cos H} \\ y' &= d - \frac{d\,(\cos\varphi\ \tan\delta - \mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,H)}{\cos\varphi\ \tan\delta - \mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,H - \tan\phi\cos H} \\ z' &= h - \frac{d\,(\mathrm{sen}\,\varphi\ \tan\delta + \cos\varphi\ \mathrm{sen}\,H)}{\cos\varphi\ \tan\delta - \mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,H - \tan\phi\cos H} \end{aligned} \tag{18}$$

La línea de equinoccios es perpendicular a la meridiana en las superficies horizontal y polar, en las verticales no declinantes es perpendicular a la vertical y en las declinantes tiene una cierta inclinación que puede determinarse mediante dos puntos de la recta:

$$\delta = 0\ H = 0 \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = h + d\cot\varphi \end{cases} \qquad \delta = 0\ H = 90 \begin{cases} x' = d\cot\phi \\ y' = d \\ z' = h \end{cases} \tag{19}$$

con el primer punto se conoce la ordenada en el origen y con ambos la pendiente:

$$i = \arctan\left(\frac{h - h - d\cot\varphi}{d\cot\phi\cos\phi + d\,\mathrm{sen}(\phi)}\right) = \arctan\left(\frac{-\,\mathrm{sen}\,\phi}{\tan\varphi}\right) \tag{20}$$

El cálculo anterior se basa en un nomon con su puntos de inserción y del extremo fijos y un plano vertical que puede girar, cuando gira el nomon deja de ser perpendicular al plano vertical. Se puede sustituir el nomon inicial por otro perpendicular al plano vertical declinado y que sus extremos coincidan, con una longitud reducida dl y con su punto de inserción desplazado horizontalmente (Δ, h):

$$dl = d\ \cos\phi \qquad \Delta = d\ \mathrm{sen}\,\phi \tag{21}$$

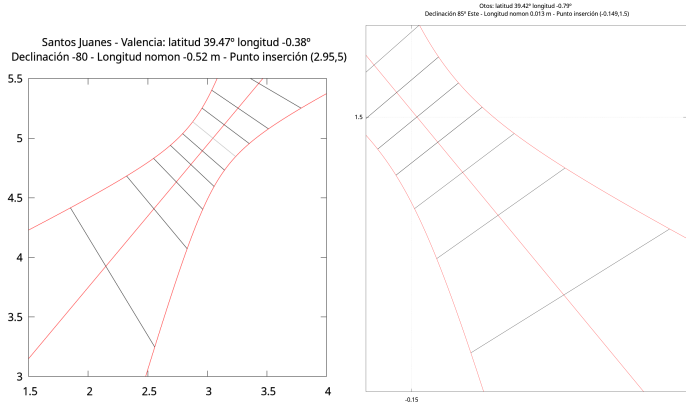

Figura 11: La fachada de los Santos Juanes está orientada al Sur y declinada al Oeste y la línea en tono gris señala las 18 hora solar, mientras que la de Otos está orientada al Norte y declinada al Este.

2.6. Vertical paralelo al meridiano local

Un plano vertical paralelo al meridiano local permite construir un reloj tanto en su cara orientada al Este como al Oeste. El plano vertical corta al eje X' en el origen $x' = 0$ y el nomon de longitud d se inserta perpendicular al plano vertical en cualquiera de sus caras a una cierta altura del suelo, las coordenadas del punto de inserción son $(0, 0, h)$ y las del extremo $(d, 0, h)$ con $d > 0$ si se inserta en la orientada al Este y $d < 0$ al Oeste.
Las componentes de las rectas $(x', y' z') = (d, 0, h) + \alpha\ \vec{u}'$ que representan los rayos que pasan por el extremo del nomon son:

$$\begin{aligned} x' &= d + \alpha\ \cos\delta\cos H \\ y' &= \alpha\,(\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\delta - \mathrm{sen}\,\varphi\cos\delta\,\mathrm{sen}\,H) \\ z' &= h + \alpha\,(\mathrm{sen}\,\varphi\ \ \mathrm{sen}\,\delta + \cos\varphi\cos\delta\,\mathrm{sen}\,H) \end{aligned} \tag{22}$$

El parámetro α se obtiene al considerar que los rayos que alcanzan el plano vertical deben cumplir la condición $x' = 0$:

$$\alpha = \frac{-d}{\cos\delta\cos H} \tag{23}$$

y con él las ecuaciones de las coordenadas, simplificadas, para el trazado del reloj en el plano vertical $Y'Z'$:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{d\,(\cos\varphi\tan\delta - \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,H)}{\cos H} \\ z' &= h - \frac{d\,(\mathrm{sen}\,\varphi\ \ \tan\delta + \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,H)}{\cos H} \end{aligned} \tag{24}$$

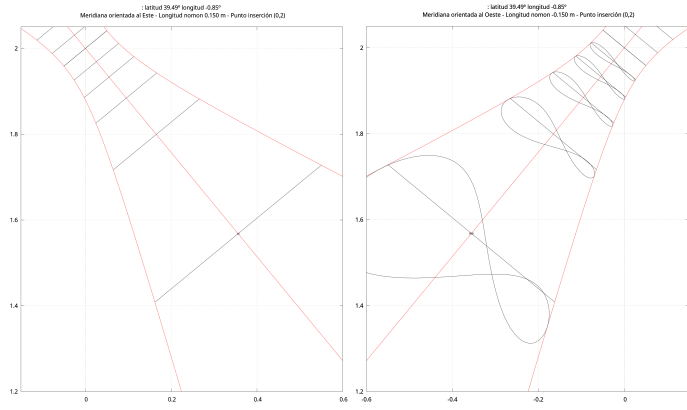

Figura 12: El trazado en ambas caras Este y Oeste en un plano vertical paralelo al meridiano local es el mismo. En la del Oeste se ha incluido el analema de cada hora excepto la de las 18, por coincidir con las de las 6 en del Este.

La línea de equinoccios es la intersección perpendicular del plano vertical con el ecuatorial, de forma que su inclinación es igual a la colatitud cambiada de signo y la ordenada en el origen se encuentra en el punto de inserción del nomon, como se puede confirmar hallando dos puntos de la recta:

$$\delta = 0 \; H = 0 \begin{cases} y' = 0 \\ z' = h \end{cases} \qquad \delta = 0 \; H \begin{cases} y' = d \tan H \operatorname{sen} \varphi \\ z' = h - d \tan H \cos \varphi \end{cases} \tag{25}$$

$$i = \arctan \left(\frac{h - h + d \cos \varphi \tan H}{-d \operatorname{sen} \varphi \tan H} \right) = \arctan \left(- \cot \varphi \right) = \arctan \left(- \tan(90 - \varphi) \right) = -(90 - \varphi) \tag{26}$$

3. Nomon

Manteniendo plana la superficie de proyección se puede complementar todo lo descrito con tres variantes: incorporación de un nomon paralelo al eje terrestre, sustitución del nomon fijo por otro móvil y uso de nomon múltiple con su propio plano de proyección.

3.1. Nomon paralelo al eje terrestre

Es muy común el uso de una varilla como un nomon paralelo al eje terrestre, se pueden calcular las coordenadas del punto inserción de la recta que representa la varilla haciendo que pase por el extremo del nomon y su dirección sea paralela a la del eje terrestre, que viene dada por el vector unitario:

$$\vec{w}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix} \tag{27}$$

Las componentes de las rectas $(x', y', z') = (0, 0, h) + \alpha\ \vec{w}'$ que representan la varilla en las superficies de proyección horizontal y vertical no declinante son:

$$x' = 0 \qquad y' = 0 + \alpha\ \cos\varphi \qquad z' = h + \alpha\ \operatorname{sen}\varphi \tag{28}$$

La componente vertical del punto de inserción de la varilla en la superficie horizontal es $z' = 0$ y con este valor se deduce la otra componente $y' = -h \cot\varphi$.
En el vertical no declinante la coordenada horizontal debe ser $y' = d$ y con ella se deduce la vertical $z' = h + d\ \tan\varphi$, donde se ha considerado que $d > 0$ en el hemisferio Norte y $d < 0$ en el Sur, un signo que se compensa con el cambio de signo de la latitud.

Las componentes de las rectas $(x', y', z') = (0, d, h) + \alpha\ \vec{v}$ que representan la varilla en la superficie vertical declinante son:

$$x' = 0 \qquad y' = d + \alpha \cos\varphi \qquad z' = h + \alpha\ \operatorname{sen}\varphi \tag{29}$$

La coordenada horizontal del punto de inserción de la varilla es $y' = 0$ y con ella se deduce la vertical $z' = h - d\ \tan\varphi$ donde se había tomado $d < 0$ para la cara orientada al Sur y $d >$ la del Norte.

En la superficie ecuatorial el nomon es paralelo a la varilla y en la superficie polar la varilla se colocaría paralela al eje terrestre, sin punto de inserción.

3.2. Nomon móvil

El reloj llamado analemático es el resultado de la proyección perpendicular del reloj ecuatorial en el plano horizontal[3], tiene la característica de que la persona que lo usa hace de nomon y su posición cambia con la fecha.

Concretamente se proyecta un reloj ecuatorial armilar (ver figura 19) con un anillo de radio R, tangente al suelo y con su centro a una altura del suelo adaptada a la media de las personas que lo van a usar. Al mediodía de los equinoccios los rayos son paralelos al plano ecuatorial y la sombra del centro del anillo pasa por dicho punto tangencial marcando las 12 hora solar media; durante el mediodía en los solsticios los rayos forman un ángulo con el punto tangencial igual a la declinación solar y cortan al nomon, paralelo al eje terrestre, a una distancia $R \tan(\pm 23'44)$ del centro.
Las coordenadas de cualquier hora en el sistema de referencia ecuatorial, formado por la dirección Este-Oeste y su perpendicular que forma un ángulo igual a la latitud φ con el plano horizontal, son:

$$x = -R \cos H \qquad y = R \operatorname{sen} H \tag{30}$$

que coinciden con las obtenidas en (7) con la particularidad de que la proyección horaria en el interior del anillo es independiente de la declinación solar. Su proyección en el plano horizontal tiene otras coordenadas, referidas al sistema formado por la dirección Este-Oeste y la Norte-Sur:

$$x' = x = -R \cos H \qquad y' = y \cos(90 - \varphi) = R \operatorname{sen} H \cos(90 - \varphi) \tag{31}$$

en ambos sistemas se toman valores positivos en dirección Norte y en dirección Este.

[3] De la década de 1650 data el significado etimológico mas antiguo del término analema: la proyección de la esfera celeste en el plano meridiano (`https://www.etymonline.com/word/analemma`)

La proyección de la circunferencia del anillo da lugar a una elipse, mientras que en el plano ecuatorial si una coordenada toma el valor 0 la otra coincide con R, en el horizontal si $x' = 0$ la otra coordenada coincide con el valor del semieje menor de la elipse $y' = R\cos(90 - \varphi)$ y si es $y' = 0$ con el valor del semieje mayor $x' = R$.

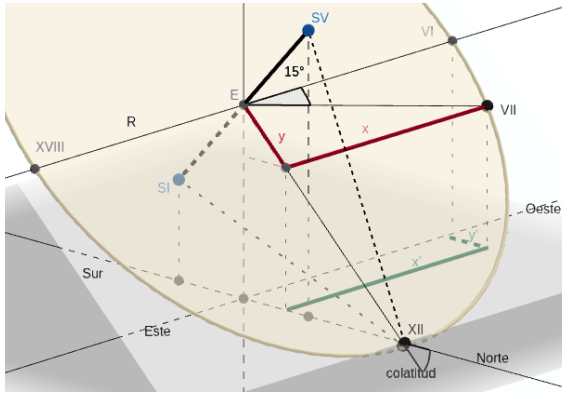

Figura 13: La proyección de las VII muestra gráficamente la relación entre sus coordenadas referidas al plano ecuatorial con las referidas al horizontal. Los rayos solares que pasan por los puntos de los solsticios SV y SI y de los equinoccios E, coinciden en el punto tangente.

La persona que hace de nomon cuando coloca sus pies sobre el origen del sistema horizontal y el extremo de su cabeza cae bajo el origen del sistema ecuatorial, su sombra alcanzará las 12 del punto tangencial al mediodía durante los equinoccios, durante el solsticio de verano deberá moverse hacia el punto tangencial hasta colocarse bajo el punto SV y en el de invierno alejarse hasta colocarse justo debajo del punto SI de la figura (13), no obstante su sombra se proyectará mas allá del punto tangencial en el solsticio de invierno y no lo alcanzará durante el de verano.

Las coordenadas de posición de los pies a lo largo del año se ubican en el eje Norte-Sur entre los valores extremos marcados por la proyección de los puntos SV y SI:

$$x' = 0 \qquad y' = R\tan\delta\cos\varphi \tag{32}$$

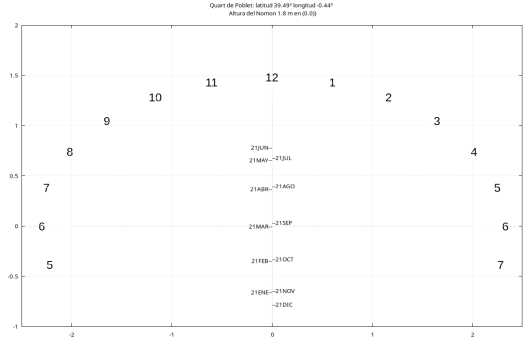

Figura 14: Reloj analemático situado en el recorrido del parque del Turia a su paso por Quart de Poblet.

3.3. Nomon múltiple

Esta característica la reúne un reloj polar formado por un semianillo con su eje paralelo al terrestre y que reposa sobre una superficie plana polar.
El semianillo tiene once orificios separados 15°, junto a los troqueles con la forma numérica de 7 a 17 correspondientes a cada una de las horas del Sol medio. La superficie del semianillo extiende su sombra en el plano de proyección mientras que por los orificios y troqueles pasan los rayos solares que iluminan una determinada zona de sombra. Cada uno de ellos actúa como el extremo de un nomon de longitud igual al radio del semianillo, con diferente inclinación con respecto al plano de proyección.

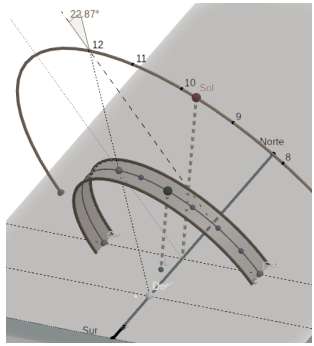

Figura 15: Representación de la órbita del Sol, la dirección de los rayos solares correspondientes a una determinada HM y la de los rayos paralelos que atraviesan los orificios horarios del semianillo. Con el programa GeoGebra se puede simular su funcionamiento cuando al seleccionar la posición del Sol a cualquier hora del día y estación del año se visualiza la proyección de los orificos horarios del semianillo.

Se aplican las ecuaciones de la sección (2.3) tomando la hora solar verdadera V en el vector unitario de los rayos solares, el plano de proyección fijo y la hora solar media en las coordenadas de cada orificio $(h\cos H, 0, h\,\mathrm{sen}\,H)$:

$$x = h\cos H + \alpha\ \cos\delta\cos V\ ;\ y = 0 + \alpha\ \mathrm{sen}\,\delta\ ;\ z = h\,\mathrm{sen}\,H + \alpha\ \cos\delta\,\mathrm{sen}\,V \tag{33}$$

$$z = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-h\,\mathrm{sen}\,H}{\cos\delta\,\mathrm{sen}\,V} \tag{34}$$

$$x = h\cos H - \frac{h\,\mathrm{sen}\,H\cos V}{\mathrm{sen}\,V} = \frac{h\,\mathrm{sen}(V-H)}{\mathrm{sen}\,V} \quad ; \quad y = -\frac{h\tan\delta\,\mathrm{sen}\,H}{\mathrm{sen}\,V} \tag{35}$$

las ecuaciones de las coordenadas se modifican para que contengan las variables H y ET:

$$x = \frac{h\,\mathrm{sen}\,ET}{\mathrm{sen}(H+ET)} \quad ; \quad y = -\frac{h\tan\delta\,\mathrm{sen}\,H}{\mathrm{sen}(H+ET)} \tag{36}$$

y mostrar su dependencia con el ángulo horario medio y el número de día, las variables declinación y ecuación de tiempo dependen del número de día como se describe en las ecuaciones (1) y (2). Si se fija H se obtiene su analema correspondiente a lo largo de año al variar el número de día.

En este tipo de reloj los rayos solares que atraviesan los orificios del semianillo no son perpendiculares a la superficie de proyección, excepto al mediodía, y producen una serie de particularidades para la lectura correcta de la hora y fecha.
Una de ellas consiste en la distorsión de la gráfica de la curva horaria verdadera, analema, correspondiente a cualquier hora con respecto a la del mediodía, un efecto que aumenta con la diferencia horaria

y el radio del semianillo. Otra consiste en la difracción de Fraunhofer que afecta principalmente a los bordes de los orificios y troqueles, junto a la distorsión de la figura proyectada. Estas particularidades tienen un mínimo relativo al mediodía, cuando los rayos son perpendiculares al plano de proyección.

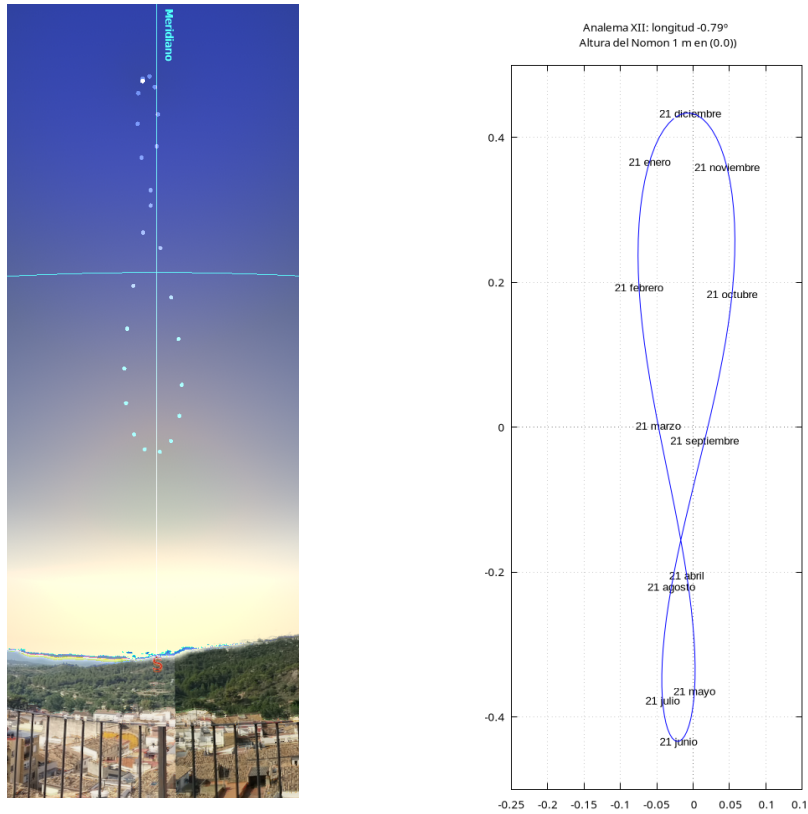

Figura 16: (izqda.) Posiciones del Sol alrededor del ecuador celeste y del meridiano local de Buñol, los días 1 y 15 de cada mes al mediodía, elaborado con Stellarium y Gimp .(dcha.) Analema o proyección horizontal de la hora solar verdadera del mediodía a lo largo del año, para un reloj con un radio de 1 m ubicado en Buñol ($\lambda = -0'78°$).

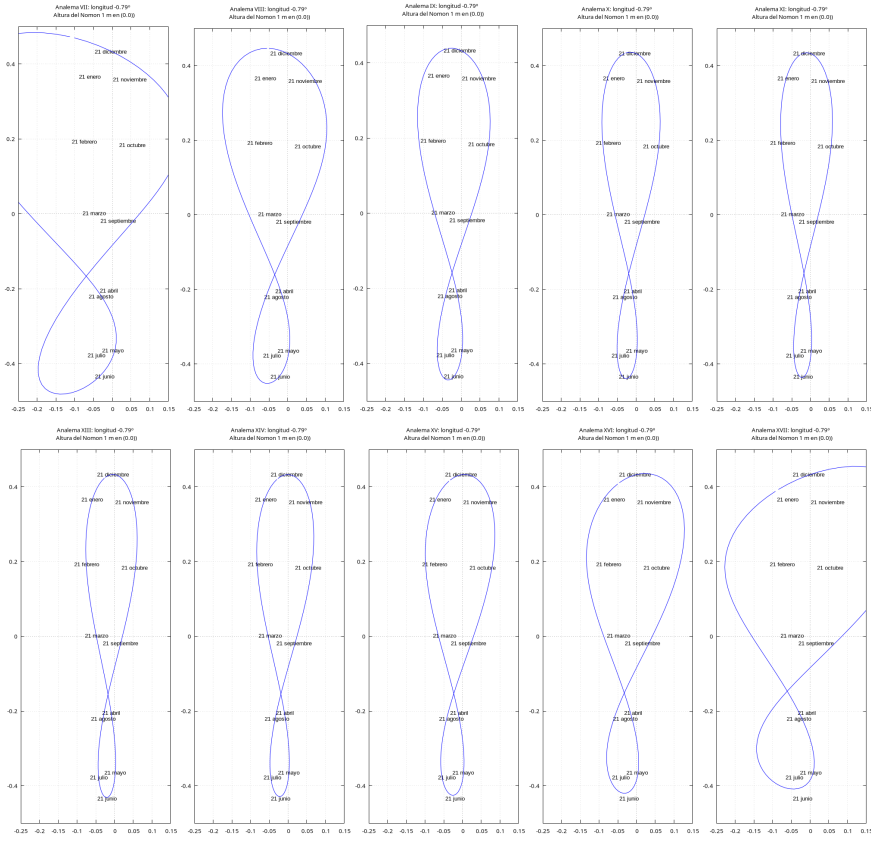

Figura 17: De izquierda a derecha y de arriba abajo los analemas correspondientes a los orificios de las 7 a las 17. Para apreciar la desviación se han incluido las fechas del analema del mediodía.

El hecho de que los efectos de estas particularidades se minimizan al mediodía, sugieren que la superficie de proyección en vez de ser estática pudiera girarse hasta quedar perpendicular a los rayos solares de la hora correspondiente, de esta forma la proyección de cualquier hora se comportaría como la de H=90, convirtiéndose cada orificio en un nomon con su propio plano de proyección.

Se añade la coordenada vertical en las ecuaciones (36) para referirse al plano de proyección giratorio:

$$x = h\cos H + \alpha\ \cos\delta\cos V\ ;\ y = 0 + \alpha\ \operatorname{sen}\delta\ ;\ z = h\operatorname{sen} H + \alpha\ \cos\delta\operatorname{sen} V \tag{37}$$

la condición que permite conocer el parámetro α es cuando los rayos inciden en el plano giratorio:

$$z = x\ \tan(90 + H) = -x\cot H \tag{38}$$

cuyo resultado es:

$$\alpha = \frac{-h}{\cos\delta\cos(ET)} \tag{39}$$

con el que se escriben las coordenadas del trazado en el plano $(X\cos(90+H)+Z\,\mathrm{sen}(90+H), Y)$, deduciendo que son independientes de la hora::

$$x\cos(90+H)+z\,\mathrm{sen}(90+H) = -h\frac{\mathrm{sen}(ET)}{\cos(ET)}\ ;\ y = \frac{-h\tan\delta}{\cos(ET)} \tag{40}$$

Este diseño, además de minimizar los efectos de distorsión y difracción, aporta un valor pedagógico al ser necesaria la intervención del observador para obtener la hora y fecha precisas.

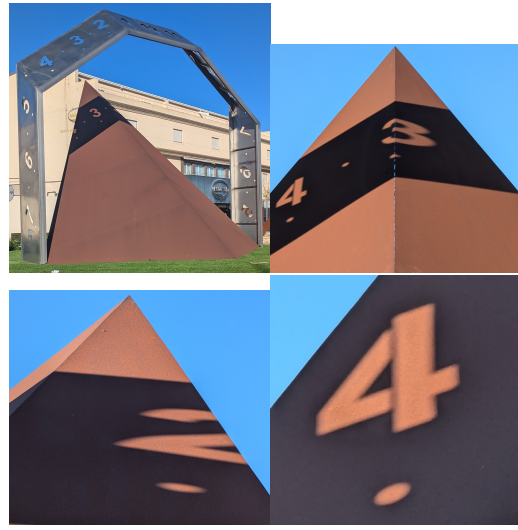

Figura 18: Reloj ubicado en Montserrat, +39'456 -0'907, en el que la hora viene dada por la figura con menor distorsión y menor efecto de difracción, al disponer la superficie de proyección lo mas perpendicular posible a la dirección de los rayos solares de cada hora.

Figura 19: Reloj ecuatorial armilar con nomon giratorio, ubicado en la Ciudad de las Ciencias de Valencia.

A. Referencias

Savoie, D. (2009). Sundials. (**https://link.springer.com/book/9780387098012#back-to-top**)

Soler Gayá, R.. (1989). Diseño y construcción de relojes de sol. **https://xlpv.gva.es/cginet-bin/abnetop/OTccRIhG6krOJ4TnX9MkXXVw1J4/NT2**

Tupikova, I y Soffel, M.. (2022). Modelling sundials: ancient and modern errors. (**https://www.researchgate.net/publication/363619039_Modelling_sundials_ancient_and_modern_errors**)

B. Guiones para Gnuplot

El programa de trazado de gráficas Gnuplot es sencillo de usar y potente en su ejecución. En todas las situaciones estudiadas se han calculado las ecuaciones de las coordenadas para hacer el trazado de las líneas de fecha y horarias, como todas tienen dos argumentos el procedimiento seguido para el trazado consiste en fijar uno de ellos y establecer el rango de valores para el otro, por ejemplo para la curva del solsticio de invierno se fija la declinación solar y se hace variar el ángulo horario, para las líneas horarias se hace al contrario y para el analema de cualquier hora se fija el ángulo horario y la variable es el número de día.
Los trazados que aparecen en las figuras de cada una de las secciones se han obtenido a partir de guiones o scripts que permiten la introducción de datos sobre el tipo de reloj y su ubicación y que son ejecutados en Gnuplot mediante la orden load 'nombre del guión..'. A continuación se incluyen los guiones para el trazado del reloj ecuatorial y del vertical sin declinar.

```
# Reloj ecuatorial

# ================================================Salida en pantalla (tamaño múltiplo de 640*480)
#tamaño múltiplo de 640*480
#set terminal pngcairo size 1280,960 enhanced font 'Verdana,20'; set output ' .png' # ¿nombre del archivo?
# ================================================Configuración de Gnuplot
set parametric; set angles degrees; set multiplot
# ================================================================Datos y título del gráfico
nom=' '

#latitud, longitud, longitud centro del huso y diferencia (grados)
l=39.41; lo=-.79; ho=0; lon=-ho+lo

# longitud/altura nomon en m
h=1.65

set title sprintf("%s: longitud %.2f° \n Altura del Nomon %g m en (0.0))",nom,lo,h)
# ================================================Trazado del gráfico
set isotropic; set key off; set zeroaxis

set xrange[-5:5]; set yrange[-5:5];

#trazado de las curvas de fecha

set trange[0:180]
xi(t)= -h/tan(i)*cos(t); zi(t)= -h/tan(i)*sin(t)
listi="-23.44 0"
listv="0 23.44"
plot for [i in listv] xi(t),zi(t) lc 'red'

#trazado de las líneas horarias

set trange [0:23.44]
xHH(t)= -h/tan(t)*cos(HH); zHH(t)= -h/tan(t)*sin(HH)
plot for [HH=0:180:15] xHH(t),zHH(t) lc black
# ================================================Analema
# Adelanto-atraso hora solar verdadera debido a la declinación función del número de día del año y a la longitud con respecto al meridiano central del huso horario.
Variación de la declinación= asin(0.398*sin(279+0.9857*t+1.9*sin(0.9856*t-4))) y ecuación de tiempo +(595*sin(198+1.9713*t)+ 441*sin(175+0.9856*t))/240+lon

set trange[1:365]

#dibuja los analemas de todas las horas, si sólo se desea el de una hora cambiar el for por un valor de A.

vd(t)=asin(0.398*sin(279+0.9857*t+1.9*sin(0.9856*t-4))) ; et(t)=(595*sin(198+1.9713*t)+ 441*sin(175+0.9856*t))/240+lon

xA(t)= -h*cos(A+et(t))/tan(vd(t))
zA(t)= -h/tan(vd(t))*sin(A+et(t))

#dibuja los analemas de todas las horas o solo el mediodía
#plot for [A=15:165:15] xA(t),zA(t) lc 'blue'
#A=90 ; plot xA(t),zA(t) lc 'blue'
# ================================================Etiquetas para el analema del mediodía
unset label
AA=90
#set xtics 0.05;set grid;show grid
list2="21 52 80 111 141 172 202 233 264 294 325 355"
list3="1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12"
#ist3="21enero 21febero 21enero 21febero 21enero 21febero 21enero 21febero 21enero 21febero 21enero 21febero 21enero 21febero 21enero 21febero 21enero 21febero 21enero 21febero 21enero 21febero 21enero 21febero"

AA=90
#set label "21 enero" at xAAH(21),yAAH(21) center font "arial,10";set label "21 febrero" at xAAH(52),yAAH(52) center font "arial,10";set label "21 marzo" at xAAH(80),yAAH(80) center font "arial,10";set label "21 abril" at xAAH(111),yAAH(111) center font "arial,10";set label "21 mayo" at xAAH(141),yAAH(141) center font "arial,10";set label "21 junio" at xAAH(172),yAAH(172) center font "arial,10";set label "21 julio" at xAAH(202),yAAH(202) center font "arial,10";set label "21 agosto" at xAAH(233),yAAH(233) center font "arial,10";set label "21 septiembre" at xAAH(264),yAAH(264) center font "arial,10";set label "21 octubre" at xAAH(294),yAAH(294) center font "arial,10";set label "21 noviembre" at xAAH(325),yAAH(325) center font "arial,10";set label "21 diciembre" at xAAH(355),yAAH(355) center font "arial,10" show label

unset multiplot; set terminal wxt
```

 # Reloj vertical sin declinar

```
# ================================================Salida en pantalla
unset title
#set terminal pngcairo size 1920,1440 enhanced font 'Verdana,20';set output ' .png' # ¿nombre del archivo?
# ================================================Configuración de Gnuplot
set parametric ; set angles degrees ; set multiplot
set xtics 0.2; set ytics 0.2; set grid
# ================================================================Datos
nom=' '
ho=0  #introduce el huso horario en grados
l=39.42;lo=-.78;ho=0 ; lon=-ho+lo
if (l<0) {hemi='Sur'} else {hemi='Norte'}
d=0.15 # longitud del nomon = distancia de la pared al origen >0 en el hemisferio N y <0 en el S.
h=2 # altura nomon
# ================================================================Título y etiquetas
set title sprintf("%s: latitud %.2fº longitud %.2fº \n Hemisferio %s - Longitud nomon %.3f m - Punto inserción (0,%g)",nom,l,lo,hemi,abs(d),h)

unset label
#set label "Solsticio verano" at 0.07,1.51  font "arial,7" #rotate by 45
#set label "Solsticio invierno" at 0.3,1.99 font "arial,7"
#set label "Equinoccios" at 0.26,1.76 font "arial,7"
#set label "XII" at -0,1.96 center font "arial,20"

#declinación del Sol, list1: solsticios y equinoccios, list2: todos los meses
list1="-23.44 0 23.44"
#list2="-23.44 -19.8 -10.7 0 12 20.3 23.44"
# ================================================Trazado del gráfico
set isotropic ; set key off ; set zeroaxis

set xrange[-.4:0.4]; set yrange[1.2:2.1];

#trazado de las curvas de fecha

set trange[0:180]

xSS(t)= d*cos(t)/(cos(l)*tan(SS)-sin(l)*sin(t))
zSS(t)= h+d*(tan(SS)*sin(l)+cos(l)*sin(t))/(cos(l)*tan(SS)-sin(l)*sin(t))

plot for [SS in list1] xSS(t),zSS(t) lc 'red'

#etiquetas de las horas

if (-l/abs(l)>0){SS=-l/abs(l)*26} else {SS=-l/abs(l)*26}
#SS=-l/abs(l)*24
set label "11" at xSS(60),zSS(60) center font "arial,10" ; set label "12" at xSS(75),zSS(75) center font "arial,10" ; set label "13" at xSS(90),zSS(90) center font "arial,10" ;
set label "14" at xSS(105),zSS(105) center font "arial,10" ; set label "15" at xSS(120),zSS(120) center font "arial,10"
if (-l/abs(l)<0){SS=l/abs(l)*24} else {SS=l/abs(l)*24}
#SS=l/abs(l)*24
set label "12" at xSS(60),zSS(60) center font "arial,10" ; set label "13" at xSS(75),zSS(75) center font "arial,10" ; set label "14" at xSS(90),zSS(90) center font "arial,10" ;
set label "15" at xSS(105),zSS(105) center font "arial,10" ; set label "16" at xSS(120),zSS(120) center font "arial,10"
show label

#trazado de líneas horarias

set trange[-23.4:23.4]

xHH(t)= d*cos(HH)/(cos(l)*tan(t)-sin(l)*sin(HH))
zHH(t)= h+d*(tan(t)*sin(l)+cos(l)*sin(HH))/(cos(l)*tan(t)-sin(l)*sin(HH))

plot for [HH=15:165:15] xHH(t),zHH(t)  lc 'black'
# ================================================Analema a las 12 hora solar, u otras horas seleccionadas
set trange[0:365]

#dibuja los analemas de todas las horas, si sólo se desea el de una hora cambiar el for por un valor de A.

vd(t)=asin(0.398*sin(279+0.9857*t+1.9*sin(0.9856*t-4))) ; et(t)=(595*sin(198+1.9713*t)+ 441*sin(175+0.9856*t))/240+lon

xA(t)= d*cos(A+et(t))/(cos(l)*tan(vd(t))-sin(l)*sin(A+et(t)))
zA(t)= h+d*(tan(vd(t))*sin(l)+cos(l)*sin(A+et(t)))/(cos(l)*tan(vd(t))-sin(l)*sin(A+et(t)))

#plot for [A=15:165:15] xA(t)*cos(D)+yA(t)*sin(D),zA(t) lc 'black'
A=90; plot xA(t),zA(t) lc 'blue'

unset multiplot ; set terminal wxt ; unset grid ; set xtics ; set ytics
```